

УДК 539.3

doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-5

Исследование плоских гармонических волн на цилиндрической полости эллиптического сечения в ортотропной среде

Т. В. Волобуева

Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

tv190470@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Целью работы является решение задачи стационарного рассеяния продольно-сдвиговых волн на цилиндрических полостях гладкого криволинейного сечения в анизотропных средах. *Материалы и методы.* При исследовании поставленной задачи применяются методика коррекции упругих постоянных, метод обобщенных волновых потенциалов, метод сингулярного анализа матрицы плана, прием точной минимизации квадратичного функционала невязки граничных условий. *Результаты.* Описан и применен алгоритм численно-аналитического решения дифракционной задачи для исследования закономерностей распределения напряжений на контуре эллиптической полости. *Выводы.* Используемая методика является эффективным средством решения поставленной задачи, позволяющим проанализировать влияние степени анизотропии среды на распределение приведенных напряжений.

Ключевые слова: обобщенные волновые потенциалы, ортотропная упругая среда, продольно-сдвиговые волны

Для цитирования: Волобуева Т. В. Исследование плоских гармонических волн на цилиндрической полости эллиптического сечения в ортотропной среде // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 3. С. 57–63. doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-5

Studying plane harmonic waves on a cylindrical cavity of elliptical section in an orthotropic medium

T.V. Volobueva

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

tv190470@yandex.ru

Abstract. *Background.* The purpose of this work is to solve the problem of stationary scattering of longitudinal shear waves on cylindrical cavities of smooth curved section in anisotropic media. *Materials and methods.* In the study of this problem, the method of correction of elastic constants, the method of generalized wave potentials, the method of singular analysis of the plan matrix, the method of accurate minimization of the quadratic functional of the residual boundary conditions are used. *Results.* An algorithm for the numerical and analytical solution of the diffraction problem is described and applied to study the patterns of stress distribution on the contour of an elliptical cavity. *Conclusions.* The method used is an effective means of solving the problem, which allows analyzing the effect of the degree of anisotropy of the medium on the distribution of reduced stresses.

Keywords: generalized wave potentials, orthotropic elastic medium, longitudinal shear waves

For citation: Volobueva T.V. Studying plane harmonic waves on a cylindrical cavity of elliptical section in an orthotropic medium. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2024;(3):57–63. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-5

Введение

В работе [1] предложена численно-аналитическая методика решения граничных задач стационарно плоского динамического деформирования ортотропных упругих сред, для которых за счет специальной малой коррекции модулей упругости могут быть введены обобщенные волновые потенциалы [2].

В данной статье изложены результаты применения этой методики для решения задач стационарного рассеяния продольно-сдвиговых волн на цилиндрических полостях гладкого криволинейного сечения

Материалы и методы

Рассматривается упругое ортотропное пространство, отнесенное к безразмерным координатам $Ox_1x_2x_3$ и содержащее туннельную полость V :

$$V = \{(x_1, x_2) \in S, -\infty \leq x_3 < \infty\},$$

которая представляет собой в общем случае цилиндр гладкого криволинейного сечения. Контур ∂S сечения полости описывается параметрическим уравнением

$$(x_1)_{\partial S} = \operatorname{Re} \omega(\sigma), (x_2)_{\partial S} = \operatorname{Im} \omega(\sigma), \sigma = \exp(i\theta), \quad (1)$$

где $\omega(\zeta)$ – функция, конформно отображающая внешность ∂S на внешность единичного круга в области изменения комплексной переменной $\zeta = r \exp(i\theta)$. Угол ψ между координатным направлением Ox_1 и внешней нормалью \bar{n} к контуру ∂S при этом определяется соотношением

$$\exp(i\psi) = \sigma \omega'(\sigma) / |\omega'(\sigma)|^{-1}. \quad (2)$$

На полость, перпендикулярную ее образующей, падает плоская гармоническая продольно-сдвиговая волна, порождающая двумерное динамическое напряженно-деформированное состояние массива в плоскостях, коллинеарных плоскости Ox_1x_2 .

Результаты и обсуждение

Модули упругости ортотропного массива по предположению удовлетворяют условию, позволяющему ввести обобщенные волновые потенциалы для плоскости деформирования Ox_1x_2 [1, 2]. В этом случае безразмерные комплексные амплитудные характеристики двумерного поля упругих перемещений u_j и напряжений σ_{ij} в массиве выражаются через амплитудные составляющие Φ и Ψ обобщенных волновых потенциалов:

$$u_1 = \partial_1 \Phi + \partial_2 \Psi, u_2 = \alpha_1 \partial_2 \Phi + \beta_1 \partial_1 \Psi; \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (c_{11}\partial_1^2 + \alpha_1 c_{12}\partial_2^2)\Phi + (c_{11} + \beta_1 c_{12})\partial_1\partial_2\Psi, \\ \sigma_{22} &= (c_{12}\partial_1^2 + \alpha_1 c_{22}\partial_2^2)\Phi + (c_{12} + \beta_1 c_{22})\partial_1\partial_2\Psi, \\ \sigma_{12} &= c_{66}\left[(\alpha_1 + 1)\partial_1\partial_2\Phi + (\beta_1\partial_1^2 + \partial_2^2)\Psi\right],\end{aligned}\quad (4)$$

где $\partial_j = \partial / \partial x_j$, $\alpha_1 = (c_{22} - c_{16})(c_{12} + c_{66})^{-1}$, $\beta_1 = (c_{66} - c_{12})(c_{12} + c_{66})^{-1}$.

Геометрические и механические характеристики, имеющие линейную размерность, считаются отнесенными к нормирующему параметру R_* , а характеристики с размерностью напряжений – к нормирующему параметру $c_* = c_{66}$. Функции Φ и Ψ соответственно удовлетворяют обобщенному и метагармоническому уравнениям:

$$D_1^2\Phi + \Omega_2^2\Phi = 0; \quad (5)$$

$$D^2\Psi + \Omega_1^2\Psi = 0, \quad (6)$$

где

$$D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad D_1^2 = \partial_1^2 + \mu\partial_2^2, \quad \mu^2 = c_{22} / c_{11},$$

$$\Omega_1^2 = \rho\omega^2 R_*^2 c_*^{-1}, \quad \Omega_2^2 = \rho\omega^2 R_*^2 (c_{11}c_*)^{-1},$$

ρ – плотность материала; ω – круговая частота падающей волны.

Каждый из амплитудных потенциалов является суммой двух составляющих, описывающих поля плоских падающих и рассеянных волн. Для рассматриваемого здесь случая падения на полость продольной волны вдоль положительного координатного направления Ox_1 амплитудные потенциалы падающих волн имеют представления:

$$\Phi^{(p)} = A_p e^{ik_\varphi x_1}, \quad \Psi^{(p)} = 0, \quad k_\varphi = \Omega_2. \quad (7)$$

Амплитудные потенциалы поля рассеянных волн описываются рядами по базисным частным решениям уравнений (5), (6):

$$\Phi^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\Omega_2 r_1) \cos n\theta, \quad (8)$$

$$\Psi^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\Omega_1 r_1) \sin n\theta, \quad (9)$$

которые являются функциями полярных координат $r_1 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$, $\theta_1 = \arctg(\xi_2 / \xi_1)$, вводимых в аффинно-преобразованной плоскости $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2 / \mu$, и полярных координат (r, θ) координатной плоскости Ox_1x_2 .

Представления контурных напряжений

$$\sigma_{nn} = \sigma_{nn}^{(p)} + \sigma_{nn}^{(o)}, \quad \sigma_{ns} = \sigma_{ns}^{(p)} + \sigma_{ns}^{(o)},$$

при которых формулируются граничные условия

$$(\sigma_{nn})_{\partial S} = 0, \quad (\sigma_{ns})_{\partial S} = 0, \tag{10}$$

с учетом соотношений (2), (4), (7)–(9), следуют из следующих формул:

$$\sigma_{mm} = ((\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \cos 2\Psi + 2\sigma_{12} \sin 2\Psi) / 2, \tag{11}$$

$$\sigma_{ns} = ((\sigma_{22} + \sigma_{11}) \sin 2\Psi + 2\sigma_{12} \cos 2\Psi) / 2.$$

При этом следствием граничных условий (10) являются функциональные уравнения относительно неопределенных постоянных коэффициентов A_n, B_n , которые имеют вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n F_{n1}^{(nn)}(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_{n2}^{(nm)}(\theta) = G^{(nm)}(\theta), \tag{12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n F_{n1}^{(ns)}(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_{n2}^{(ns)}(\theta) = G^{(ns)}(\theta),$$

здесь

$$F_{n1}^{(nm)} = \frac{1}{4} \Omega_2^2 \left(\Delta_{n+2}^{(nm)} H_{n-2}^{(1)}(\Omega_2 r_1) + \Delta_n^{(nm)} H_n^{(1)}(\Omega_2 r_1) + \Delta_{n-2}^{(nm)} H_{n+2}^{(1)}(\Omega_2 r_1) \right)_{\partial S},$$

$$F_{n2}^{(nm)} = \frac{1}{4} \Omega_2^2 \left(\Delta_{n+2}^{(nm)} H_{n-2}^{(1)}(\Omega_1 r) + \Delta_n^{(nm)} H_n^{(1)}(\Omega_1 r) + \Delta_{n-2}^{(nm)} H_{n+2}^{(1)}(\Omega_1 r) \right)_{\partial S},$$

$$\Delta_{n\pm 2}^{(nm)} = \left(\begin{array}{l} (\lambda_{nn}^{(11)} - \lambda_{nn}^{(22)}) \cos(n \pm 2)\theta_1 \pm \lambda_{nn}^{(12)} \sin(n \pm 2)\theta_1 \\ (\lambda_{ns}^{(11)} - \lambda_{ns}^{(22)}) \cos(n \pm 2)\theta_1 \pm \lambda_{ns}^{(12)} \sin(n \pm 2)\theta_1 \end{array} \right), \tag{13}$$

$$\Delta_{n\pm 2}^{(ns)} = \left(\begin{array}{l} (\eta_{nn}^{(11)} - \eta_{nn}^{(22)}) \sin(n \pm 2)\theta \mp \eta_{nn}^{(12)} \cos(n \pm 2)\theta \\ (\eta_{ns}^{(11)} - \eta_{ns}^{(22)}) \sin(n \pm 2)\theta \mp \eta_{ns}^{(12)} \cos(n \pm 2)\theta \end{array} \right),$$

$$\Delta_n^{(nm)} = -2 \left(\begin{array}{l} (\lambda_{nn}^{(11)} - \lambda_{nn}^{(22)}) \cos n\theta_1 \\ (\lambda_{ns}^{(11)} - \lambda_{ns}^{(22)}) \cos n\theta_1 \end{array} \right),$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_n^{(nn)} \\ \Delta_n^{(ns)} \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} (\eta_{nn}^{(11)} - \eta_{nn}^{(22)}) \\ (\eta_{ns}^{(11)} - \eta_{ns}^{(22)}) \end{pmatrix} \sin n\theta,$$

$$\lambda_{nn}^{(11)} = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12} + (c_{11} - c_{12})\cos 2\theta),$$

$$\lambda_{nn}^{(22)} = \frac{1}{2}\alpha_1\mu^{-2}(c_{12} + c_{22} + (c_{12} - c_{22})\cos 2\theta),$$

$$\lambda_{nn}^{(12)} = c_{66}\mu^{-1}(\alpha_1 + 1)\cos 2\theta, \quad \eta_{nn}^{(11)} = c_{66}\beta_1\sin 2\theta, \quad \eta_{nn}^{(22)} = c_{66}\sin 2\theta,$$

$$\eta_{nn}^{(12)} = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12} + \beta_1(c_{12} + c_{22}) + (c_{11} - c_{12} + \beta_1(c_{12} - c_{22}))\cos 2\theta),$$

$$\lambda_{ns}^{(11)} = \frac{1}{2}(c_{12} + c_{11})\sin 2\theta, \quad \lambda_{ns}^{(22)} = \frac{1}{2}(c_{22} + c_{12})\alpha_1\mu^{-1}\sin 2\theta,$$

$$\lambda_{ns}^{(12)} = c_{66}\mu^{-1}(1 + \alpha_1)\cos 2\theta,$$

$$\eta_{ns}^{(11)} = \beta_1c_{66}\cos 2\theta, \quad \eta_{ns}^{(22)} = c_{66}\cos 2\theta,$$

$$\eta_{ns}^{(12)} = \frac{1}{2}(c_{12} - c_{11} + \beta_1(c_{12} - c_{22}))\sin 2\theta.$$

При проведении численных исследований функциональные уравнения (12) сводятся к системе линейных алгебраических уравнений с использованием приема точной минимизации квадратичного функционала невязки граничных условий (10) [3]. Для эффективного решения получаемой алгебраической системы применяется метод сингулярного анализа матрицы плана [4].

Описанный алгоритм численного аналитического решения применен для исследования закономерностей распределения амплитуд напряжений σ_{ss} на контуре эллиптической полости с полуосями a , b . В формулах (1), (2) использовалось представление $\omega(\sigma) = K(\sigma + \varepsilon\sigma^{-1})$, $s = (b-a)(b+a)$,

$R_* = (a+b)/2$. При этом определялись следующие параметры: относительная длина падающей волны $\lambda = 2\pi/(\Omega_2 R)^{-1}$; степень анизотропии массива со скорректированными упругими постоянными $\eta = \frac{c_{22}c_{66} + c_{12}(c_{12} + 2c_{66})}{(c_{22} - c_{66})c_{33}}$;

эксцентриситет $s = (R_*^2 - a^2)(R_*^2 + a^2)^{-1}$ рассеивающей полости с постоянной площадью сечения $S = \pi ab = \pi R_*^2$.

На рис. 1, 2 соответственно для двух значений параметра степени анизотропии $\eta = 1,053$, $\eta = 1,149$ представлены распределения приведенных

напряжений $\tilde{\sigma}_s = \sigma_{ss} / \sigma_{11}^{(p)}$ в точке контура с угловой координатой $\theta = \pi / 2$, которая находится в лицевой зоне взаимодействия падающей волны и рассеивающего препятствия – полости. Сплошные линии соответствуют напряжениям в точке эллиптического контура с варьируемым эксцентриситетом для момента времени, соответствующего полупериоду падающей волны. Материалом с параметром $\eta_1 = 1,053$ является мрамор, деформируемый в кристаллографической плоскости Ox_1x_2 [1]. Материал с параметром $\eta = 1,149$ является модельным; его модули упругости c_{12}, c_{66} соответствуют упругим постоянным мрамора, а связанные соотношением $c_{11} = \frac{c_{22}c_{66} + c_{12}(c_{12} + 2c_{66})}{(c_{22} - c_{66})}$ постоянные c_{11}, c_{22} соответственно равны $c_{11} = 11,44 \cdot 10^9$ Па, $c_{22} = 11,44 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{22} = 9,95 \cdot 10^{10}$ Па.

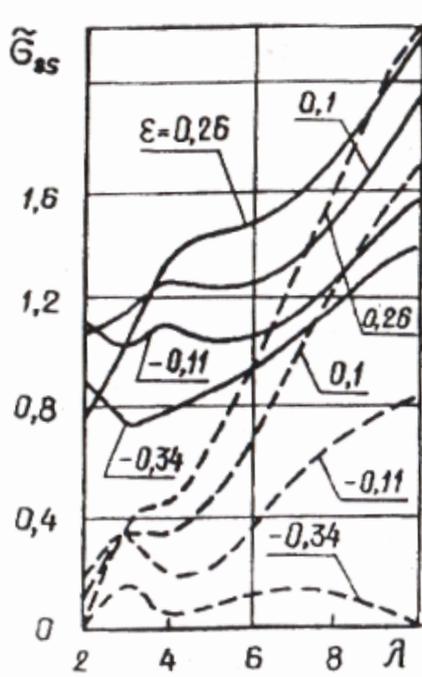


Рис. 1

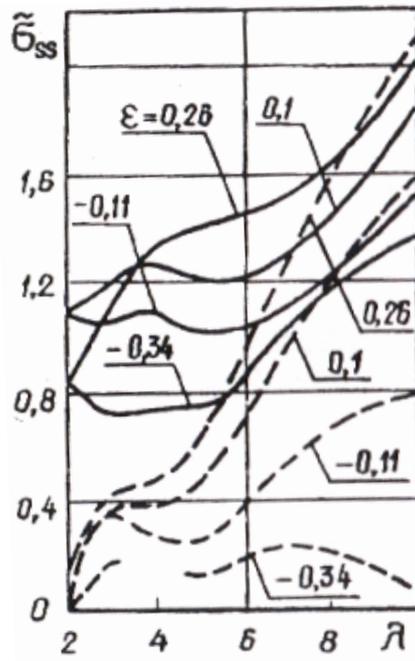


Рис. 2

Заключение

Из проведенных распределений следует, что степени анизотропии в большей степени влияют на уровни напряжений у эллиптического сечения с большим отрицательным эксцентриситетом при падении волн средней длины $3 < \lambda < 8$.

Список литературы

1. Нестерова Л. А., Сторожев В. И. Дифракция импульсных продольно-сдвиговых волн в ортотропном массиве с круговой полостью. Донецк, 1981. 8 с.

2. Шульга М. А. Волновые потенциалы для упругих трансверсально-изотропных сред // Доп. АНУСРСР. Серия А. Физико-математические и технические науки. 1968. № 10. 4 с.
3. Космодамианский А. С., Сторожев В. И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. Киев : Наукова думка, 1985. 176 с.
4. Форсайт Дж., Мальком М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М., 1980. 280 с.

References

1. Nesterova L.A., Storozhev V.I. *Difraktsiya impul'snykh prodol'no-sdvigovykh voln v ortotropnom massive s krugovoy polost'yu = Diffraction of pulsed longitudinal-shear waves in an orthotropic array with a circular cavity*. Donetsk, 1981:8. (In Russ.)
2. Shul'ga M.A. Wave potentials for elastic transversely isotropic media. *Dop. ANUSRSR. Seriya A. Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki = Dop. ANUSRSR. Series A. Physical, mathematical and engineering sciences*. 1968;(10):4. (In Russ.)
3. Kosmodamianskiy A.S., Storozhev V.I. *Dinamicheskie zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh sred = Dynamic problems of elasticity theory for anisotropic media*. Kiev: Naukova dumka, 1985:176. (In Russ.)
4. Forsythe G., Malcom M., Moler C. *Mashinnye metody matematicheskikh vychisleniy = Machine methods of mathematical calculations*. Moscow, 1980:280. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Татьяна Витальевна Волобуева

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры систем
управления и информационных
технологий в строительстве,
Воронежский государственный
технический университет (Россия,
г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84)

E-mail: tv190470@yandex.ru

Tatiana V. Volobueva

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department
of management systems and information
technologies in construction, Voronezh
State Technical University (84 20-letiya
Oktyabrya street, Voronezh, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 04.07.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 20.08.2024

Принята к публикации / Accepted 10.09.2024